Конструкција ауто-дуалних комплекса, ауто-дуалне триангулације многострукости

Маринко Тимотијевић

ПМФ Крагујевац
e-mail: marinko.timotijevic@pmf.kg.ac.rs

Раде Живаљевић

Математички институт САНУ
e-mail: rade@turing.mi.sanu.ac.rs

Апстракт. Александеров дуал симплицијалног комплекса $K \subseteq 2^{[n]}$ је симплицијални комплекс $\widehat{K}^{[n]} = \{[n] \setminus A \mid A \notin K\}$. Комплекс K је ауто-дуалан ако је $K = \widehat{K}^{[n]}$ а под-дуалан ако је $K \subseteq \widehat{K}^{[n]}$. Ауто-дуални симплицијални комплекси са n темена представљају канонске примере симплицијалних комплекса који немају геометријску реализацију у простору $\mathbb{R}^{n-3}$, јављају се као минималне триангулације многих тополошких простора и врло су значајни у теорији комбинаторне оптимизације. Brehm и Kühnel су 1987. у раду [1] доказали да ако $d-$димензионална многострукост која није сфера има триангулацију са n темена тада је:

$$n \geqslant 3\lceil d/2 \rceil + 3 \tag{1}$$

а једнакост важи само у димензијама $2, 4, 8, 16$ када многострукост има хомолошки тип реалне, комплексне, кватернионске и октанионске пројективне равни. Одговарајуће триангулације су откривене, последња 2022. године у раду [2], и све су примери ауто-дуалних симплицијалних комплекса.

У [3] се истражује комбинаторна структура ауто-дуалних симплицијалних комплекса. Доказује се да за сваки ауто-дуални комплекс $K \subseteq 2^{[n]}$ и свако теме $\{v\} \in [n]$ важи

$$K = \widehat{\mathrm{Lk}(\{v\})}^{[n]\setminus\{v\}} \cup \mathrm{C}\big(\mathrm{Lk}(\{v\})\big) \tag{2}$$

где је $\mathrm{Lk}(\{v\}) \subseteq 2^{[n]\setminus\{v\}}$ под-дуалан симплицијални комплекс у амбијенту $2^{[n]\setminus\{v\}}$. Једнакост (2) омогућава да од произвољног под-дуалног симплицијалног комплекса $K \subseteq 2^{[n]}$ добијемо комплекс

$$\Lambda K = \widehat{K}^{[n]} \cup \mathrm{C}K \tag{3}$$

(где је $\mathrm{C}K = K * \{\emptyset, \{n+1\}\}$) који је ауто-дуалан у амбијенту $2^{[n+1]}$. Отуда, комбинаторна и тополошка својства ауто-дуалних комплекса су употпуности одређена комбинаторним својствима линка њиховог произвољног темена а све ауто-дуалне комплексе можемо да добијемо својеврсном надоградњом (3) под-дуалних комплекса.

У докторској дисертацији [4] и раду [5] се анализирају ауто-дуалне триангулације многострукости. Доказује се да се ауто-дуална комбинаторна многострукост $K \subseteq 2^{[n]}$ димензије d добија надоградњом (3) под-дуалне комбинаторне сфере $\mathrm{S}^{d-1} \subset 2^{[n-1]}$ која је $(n-d-2)-$повезана тј. $\binom{[n-1]}{n-d-2} \subset \mathrm{S}^{d-1}$. Користећи комбинаторну Александерову дуалност, доказује се да ауто-дуална комбинаторна многострукост $M \subset 2^{[n]}$ димензије d не може да буде сфера и да је $n = 3\lceil d/2 \rceil + 3$ што по резултату (1) Brehm-а и Kühnel-а имплицира да је свака ауто-дуална комбинаторна многострукост димензије $d \in \{2, 4, 8, 16\}$ и има хомолошки тип реалне, комплексне, кватернионске и октанионске пројективне равни а друге ауто-дуалне комбинаторне многострукости не постоје. Одређују се $f-$вектори описаних многострукости као и $f-$вектори сфера чијом дуалном надградњом се оне добијају и наводи метода за њихову конструкцију.

Кључне речи: Симплицијални комплекс; Александерова дуалност; комбинаторна многострукост; минималне триангулације.

Библиографија

[1] **U. Brehm, W. Kühnel.** Combinatorial manifolds with few vertices. *Topology* **26**, 1987. 465 - 473.

[2] **Alexander Gaifullin** 634 vertex-transitive and more than 10^{103} non-vertex-transitive 27-vertex triangulations of manifolds like the octonionic projective plane. *arXiv:2207.08507*, 2022.

[3] **M. Timotijević.** Note on combinatorial structure of self-dual simplicial complexes. *Mat. Vesnik* **71**, 2019. 104–122.

[4] **M. Timotijević.** Auto-dualni simplicijalni kompleksi, njihova generalizacija i primene u kombinatorici i geometriji. *https://nardus.mpn.gov.rs/bitstream/handle/123456789/12259/Disertacija.pdf*, 2019.

[5] **M. Timotijević, R. Živaljević,** Constructing self-dual complexes and self-dual triangulations of manifolds, *FILOMAT* 2024. 38 (6): 2045-2060.